Análisis Matemático

Soluciones ejercicios evaluación integrales

Ejercicio 1. Calcula el límite de las sucesiones:

$$a)\ x_n = \frac{\dfrac{2}{1} + \dfrac{3^2}{2} + \dfrac{4^3}{3^2} + \cdots + \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} \qquad b)\ x_n = \left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)^{n\log n}.$$

Solución.

a) Pongamos

$$a_n = \frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}, \qquad b_n = n^2.$$

Como la sucesión $\{b_n\}$ es estrictamente creciente y positivamente divergente, podemos usar el criterio de Stolz.

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n(2n+1)} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \frac{n+2}{2n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \frac{n+2}{2n+1} \longrightarrow \frac{\mathrm{e}}{2}.$$

Luego, por e citado criterio, concluimos que $\{x_n\} \to \mathrm{e}/2$.

b) Pongamos $u_n = \dfrac{\log(n+2)}{\log(n+1)}$ y $v_n = n\log n$. Tenemos que:

$$\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)} = \frac{\log(n(1+2/n))}{\log(n(1+1/n))} = \frac{\log n + \log(1+2/n)}{\log n + \log(1+1/n)} = \frac{1+\dfrac{\log(1+2/n)}{\log n}}{1+\dfrac{\log(1+1/n)}{\log n}} \to 1.$$

Por lo que la sucesión $x_n = u_n^{v_n}$ es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n-1)=n\log n\left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}-1\right)=n\log n\left(\frac{\log(n+2)-\log(n+1)}{\log(n+1)}\right)=\frac{\log n}{\log(n+1)}\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \to 1.$$

Concluimos que $\{x_n\} \to \mathrm{e}$. ☺

Comentario. Este ejercicio estaba incluido en la relación de “Derivadas y sucesiones”. Por tanto, se supone que deberíais de haberlo hecho en casa. Además, la solución era conocida por vosotros porque la puse en el SWAD. Pues nada, ni por esas. Casi nadie lo ha hecho. ¿Conclusión?

Ejercicio 2. Calcula la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{(x+1)(x^2+8x+25)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Solución. Por definición:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{(x+1)(x^2+8x+25)}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_0^{t} \frac{x+3}{(x+1)(x^2+8x+25)}\,\mathrm{d}x$$

Para calcular esta integral usaremos el método de los coeficientes indeterminados. Como el trinomio $x^2+8x+25$ no tiene raíces reales, la descomposición en fracciones simples es de la forma:

$$\frac{x+3}{(x+1)(x^2+8x+25)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+8x+25} \Longrightarrow x+3 = A(x^2+8x+25)+(Bx+C)(x+1)$$

- Haciendo $x = -1$ obtenemos que $A = \dfrac{1}{9}$.
- Igualando coeficientes en x^2 obtenemos que $A + B = 0$, luego $B = -\dfrac{1}{9}$.
- Igualando términos independientes obtenemos $3 = 25A + C$, luego $C = 3 - 25A = \dfrac{2}{9}$.

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{x+3}{(x+1)(x^2+8x+25)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int_0^t \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{9}\int_0^t \frac{x-2}{x^2+8x+25}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{9}\log(1+t) - \frac{1}{9}\int_0^t \frac{\frac{1}{2}(2x+8)-6}{x^2+8x+25}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{9}\log(1+t) - \frac{1}{18}\int_0^t \frac{2x+8}{x^2+8x+25}\,\mathrm{d}x + \frac{6}{9}\int_0^t \frac{1}{x^2+8x+25}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{9}\log(1+t) - \frac{1}{18}\log(t^2+8t+25) + \frac{1}{18}\log(25) + \frac{2}{3}\int_0^t \frac{1}{(x+4)^2+9}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{9}\log\frac{1+t}{\sqrt{t^2+8t+25}} + \frac{1}{9}\log 5 + \frac{2}{9}\int_0^t \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x+4}{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{9}\log\frac{1+t}{\sqrt{t^2+8t+25}} + \frac{1}{9}\log 5 + \frac{2}{9}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t+4}{3}\right) - \frac{2}{9}\operatorname{arc\,tg}(4/3).
\end{aligned}$$

Deducimos que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{(x+1)(x^2+8x+25)}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{x+3}{(x+1)(x^2+8x+25)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\log 5 + \frac{\pi}{9} - \frac{2}{9}\operatorname{arc\,tg}(4/3).$$

☺

Comentarios. Este ejercicio estaba incluido en la relación “Integrales y sus aplicaciones” por lo que se supone que deberías haberlo hecho. En clase hemos hecho algún ejercicio muy parecido. En mi libro de *Cálculo Diferencial de Funciones de una Variable*, en el ejemplo 8.48 (pg. 441), se hace una integral casi igual y otra más en el ejercicio resuelto número 201 (pgs. 453-454).

Un error generalizado consiste en escribir:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{(x+1)(x^2+8x+25)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{9}\int_0^{+\infty} \frac{x-2}{x^2+8x+25}\,\mathrm{d}x\,.$$

Esa igualdad no es correcta. Ninguna de las integrales de la derecha es convergente, es decir, ambos límites son infinitos. He repetido ya demasiadas veces que ***nunca descompongas un límite como suma o como producto de otros***, eso solamente puedes hacerlo si sabes que cada una de las funciones en la suma o en el producto tiene límite finito.

La integral cuyo valor nos piden calcular es convergente, su valor es un número. Yo no te pediría que *calcularas* una integral divergente sino que *probaras* que es divergente. En los ejercicios antes citados de mi libro se insiste, al igual que también lo hice en clase, en que hay que escribir la primitiva de forma adecuada antes de calcular el límite. Copio literalmente lo que se dice en la página 442 en la observación 8.49.

> *Cuando se calculan integrales impropias convergentes de funciones racionales, hay que escribir la primitiva obtenida de forma conveniente para que el límite pueda calcularse fácilmente. Observa cómo hemos escrito la primitiva en el ejemplo anterior: hemos agrupado los logaritmos de forma apropiada para calcular el límite.*

En la página 454 se vuelve a insistir en lo mismo:

> *Observa la forma de escribir la primitiva, introduciendo una raíz cuadrada en el logaritmo con la finalidad de poder calcular el límite fácilmente. Sabemos, de entrada, que dicho límite tiene que existir y ser finito porque se trata de una integral impropia convergente.*

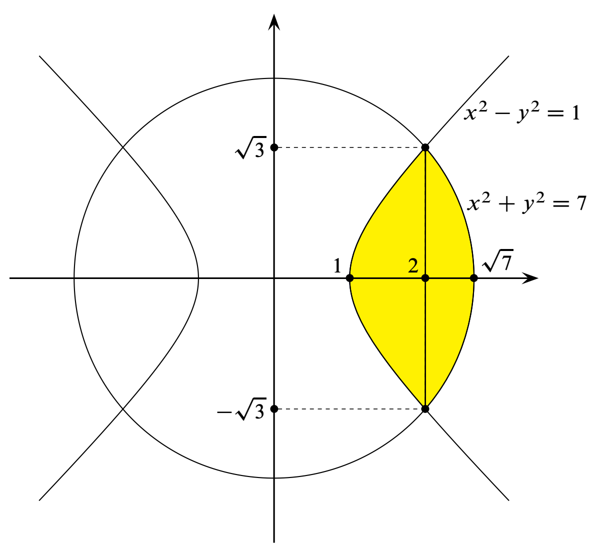
Te recuerdo que, como consecuencia del criterio límite de comparación de integrales impropias, las integrales del tipo $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ donde P y Q son funciones polinómicas y $Q(x)$ no se anula para $x \geqslant a$, son convergentes si, y sólo si, grado de $Q \geqslant$ grado de$P + 2$. Esto es algo que también he dicho en clase.

Además de este error generalizado, algunos dicen que van a calcular la integral aplicando el método de Hermite... ¿Locura transitoria?

Por supuesto, como ya es usual, hay muchísimos errores de cálculo. ¿Deben saber los ingenieros sumar y multiplicar correctamente? Siempre he creído que así debería ser, empiezo a dudarlo.

Ejercicio 3. Calcula el área de la región del plano limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 7$ y la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

Solución. Una representación gráfica siempre ayuda a evitar errores.



Se calculan fácilmente los puntos de intersección de dichas curvas $y^2 = 7 - x^2$, $y^2 = 1 + x^2$.

$$7 - x^2 = 1 + x^2 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

Los correspondientes valores de y son $\pm\sqrt{3}$.

Por simetría, el área pedida es dos veces el área de la región coloreada en amarillo. Podemos calcular el área de dicha región considerándola como una región de tipo II, en cuyo caso su área viene dada por:

$$\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{7 - y^2} - \sqrt{1 + y^2}\right) \mathrm{d}y$$

También podemos calcular el área de dicha región considerándola como región de tipo I. Las curvas que la limitan por arriba son $y = \sqrt{x^2 - 1}$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$ e $y = \sqrt{1 - x^2}$ para $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{7}$. Las opuestas de dichas curvas limitan a la región por abajo. Luego su área viene dada por:

$$2\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x\ +2\int_2^{\sqrt{7}} \sqrt{7-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Todo lo que queda es calcular las primitivas que permitan evaluar estas integrales. Se trata de primitivas inmediatas pero debes saber calcularlas. Vamos a calcular primitivas de las funciones $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$ y $\sqrt{x^2-a^2}$ donde $a>0$.

Cálculo de una primitiva de la función $\sqrt{a^2-x^2}$.

Se supone en lo que sigue que $a^2-x^2\geqslant 0$, es decir $|x|\leqslant a$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ =\big[x=a\operatorname{sen} t\big]=a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t\ =a^2\int\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=\\
&=a^2\frac{t}{2}+a^2\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}=a^2\frac{t}{2}+a^2\frac{\operatorname{sen} t\cos t}{2}=\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\\
&=\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}.
\end{aligned}$$

Cálculo de una primitiva de la función $\sqrt{x^2+a^2}$.

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\ =\big[x=a\operatorname{senh} t\big]=a^2\int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t\ =a^2\int\frac{1+\cosh(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=\\
&=a^2\frac{t}{2}+a^2\frac{\operatorname{senh}(2t)}{4}=a^2\frac{t}{2}+a^2\frac{2\cosh t\operatorname{senh} t}{2}=\frac{a^2}{2}\operatorname{argsenh}\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}=\\
&=\frac{a^2}{2}\operatorname{argsenh}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}.
\end{aligned}$$

Cálculo de una primitiva de la función $\sqrt{x^2-a^2}$.

Se supone en lo que sigue que $x^2-a^2\geqslant 0$, es decir $|x|\geqslant a$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x\ =\big[x=a\cosh t\big]=a^2\int \operatorname{senh}^2 t\,\mathrm{d}t\ =a^2\int\frac{\cosh(2t)-1}{2}\,\mathrm{d}t=\\
&=-a^2\frac{t}{2}+a^2\frac{\operatorname{senh}(2t)}{4}=-a^2\frac{t}{2}+a^2\frac{\operatorname{senh} t\cosh t}{2}=-\frac{a^2}{2}\operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\\
&=-\frac{a^2}{2}\operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}.
\end{aligned}$$

Las relaciones usadas entre las funciones seno y coseno hiperbólicos se deducen directamente de sus definiciones.

Deducimos que:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{7-y^2}-\sqrt{1+y^2}\right)\mathrm{d}y\ =7\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{3/7})-\log(2+\sqrt{3}).$$

$$2\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x\ +2\int_2^{\sqrt{7}} \sqrt{7-x^2}\,\mathrm{d}x\ =\frac{7\pi}{2}-7\operatorname{arc\,sen}(2/\sqrt{7})-\log(2+\sqrt{3}).$$

Por supuesto, ambos resultados son el mismo como puedes comprobar con *Mathematica*. ☺

Comentarios. Este ejercicio estaba incluido en la relación "Integrales y sus aplicaciones" por lo que se supone que deberías haberlo hecho. No estoy seguro de si lo hice en clase. De lo que sí estoy seguro es de que el primer ejemplo que hice en clase de la técnica de cambio de variables fue para calcular la integral $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$ y, además, dije que la preguntaría en examen. Dicha integral está hecha en mi libro de *Cálculo Diferencial de Funciones de una Variable*, en el ejercicio resuelto 197 c) (pg. 451), y también en el ejercicio resuelto 210 (pg. 489). Un ejercicio muy parecido a este es el ejercicio resuelto 203 (pg. 469) en el que se calcula el área de la región comprendida entre un círculo y una parábola. La integral $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x$ está hecha en el ejercicio resuelto 222 (pg. 498). En fin, ¿para qué seguir? De nada sirve escribir una excelente colección de ejercicios resueltos que nadie va a consultar.

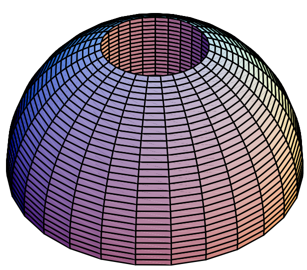
Casi nadie sabe cómo cambian los límites de integración en un cambio de variable. Hay quien necesita dar valores a x y a y en la igualdad $x^2 + y^2 = 7$ para representar esa circunferencia. Hay quien confunde una circunferencia con una parábola. Errores de cálculo absolutamente increíbles como afirmar que $\sqrt{7 - x^2} = \sqrt{7}\sqrt{-x^2}$ y otros por el estilo. Algunos obtiene un valor negativo para el área y eso les da igual. Incluso hay quien obtiene que el área es igual a cero y se queda tan tranquilo. ¿Qué pensar de todo eso? Vosotros mismos tenéis la respuesta.

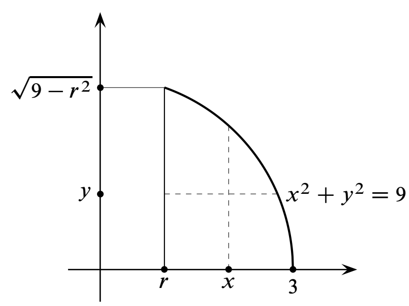
Ejercicio 4. Un sólido se genera haciendo girar la región acotada por $y = 0$ e $y = \sqrt{9 - x^2}$ alrededor del eje OY. Se perfora un orificio cilíndrico circular de radio r centrado en el eje de revolución.

a) Calcula por el método de las láminas o capas y de los discos el volumen del sólido resultante.

b) Calcula el área de la superficie lateral total de dicho sólido (no se considera la base). Calcula los valores de r para los que dicha área alcanza sus valores extremos.

Solución.





Para calcular el volumen por el método de los discos o arandelas debemos considerar secciones perpendiculares al eje de giro. Una tal sección es un segmento horizontal que describe al girar una corona circular (arandela) de radio interior r y radio exterior $\sqrt{9 - y^2}$. Por tanto el volumen pedido viene dado por:

$$\pi \int_0^{\sqrt{9-r^2}} \left(\left(\sqrt{9 - y^2} \right)^2 - r^2 \right) \mathrm{d}y = \pi \int_0^{\sqrt{9-y^2}} (9 - y^2 - r^2)\,\mathrm{d}y = \pi (9 - r^2) \sqrt{9 - y^2} - \frac{\pi}{3} (\sqrt{9 - r^2})^3 = \frac{2\pi}{3} (9 - r^2)^{3/2}.$$

Para calcular el volumen por el método de las láminas o tubos debemos considerar secciones paralelas al eje de giro. Una tal sección es un segmento vertical que describe al girar un cilindro circular de radio x y altura $\sqrt{9 - x^2}$. Por tanto el volumen pedido viene dado por:

$$2\pi \int_r^3 x \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \left[-\frac{1}{3} (9 - x^2)^{3/2} \right]_{x=r}^{x=3} = \frac{2\pi}{3} (9 - r^2)^{3/2}.$$

El área de la superficie lateral total será igual al área lateral del cilindro interior que vale $2\pi r\sqrt{9-r^2}$ más el área del casquete esférico que, como sabemos, viene dada por $2\pi\int_0^{\sqrt{9-r^2}} f(y)\sqrt{1+(f'(y))^2}\,\mathrm{d}y$, donde $f(y)=\sqrt{9-y^2}$.

$$2\pi\int_0^{\sqrt{9-r^2}} f(y)\sqrt{1+(f'(y))^2}\,\mathrm{d}y = 2\pi\int_0^{\sqrt{9-r^2}}\sqrt{9-y^2}\sqrt{1+\left(\frac{-y}{\sqrt{9-y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}y = 2\pi\int_0^{\sqrt{9-r^2}} 3\,\mathrm{d}y = 6\pi\sqrt{9-r^2}.$$

Por tanto el área total es $h(r)=2\pi r\sqrt{9-r^2}+6\pi\sqrt{9-r^2}$ donde $0\leqslant r\leqslant 3$. Calculemos el máximo absoluto de h. Tenemos que:

$$h'(x)=2\pi\left(\sqrt{9-r^2}-r\frac{r}{\sqrt{9-r^2}}-3\frac{r}{\sqrt{9-r^2}}\right)=2\pi\frac{9-2r^2-3r}{\sqrt{9-r^2}}.$$

Los puntos críticos de h son las soluciones de $2r^2+3r-9=0$ que están en el intervalo $[0,3]$. Obtenemos así que h tiene un único punto crítico que es $3/2$. Como $h'(0)>0$ y $h'(2)<0$ deducimos que $h'(x)>0$ para $0<x<3/2$ y $h'(x)<0$ para $3/2<x<3$. Por tanto h es creciente en $[0,3/2]$ y decreciente en $[3/2,3]$. Concluimos que $h(x)\leqslant h(3/2)$ para todo $x\in[0,3]$, por lo que el valor máximo absoluto de h se alcanza en $3/2$. ☺

Comentarios. Este ejercicio estaba incluido en la relación “Integrales y sus aplicaciones” por lo que se supone que deberías haberlo hecho. Además, lo hice en clase. Es un ejercicio muy fácil: los cálculos son inmediatos. Pues ni por esas.